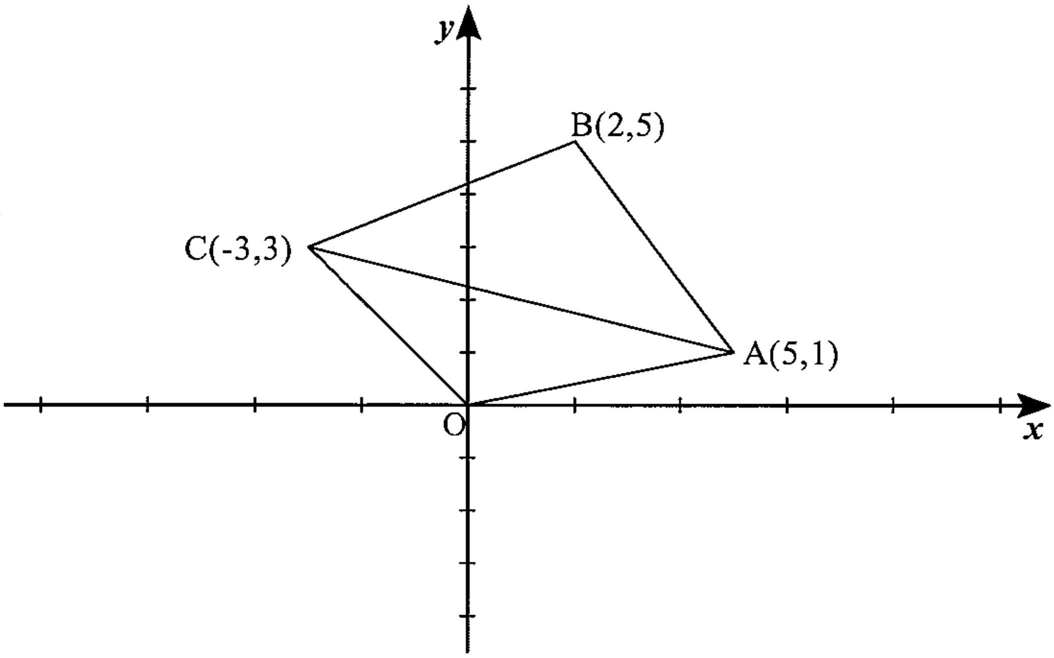
(練習問題)

下の図で、点Oは原点、点A(5,1)、点B(2,5)、点C(-3,3)である。直線OA上にy座標が負の数である点Dをとり、四角形OABCと△ABDの面積が等しくなるようにする。このとき、次の問いに答えよ

(1) △ABCの面積を求めよ。

(2) 四角形OABCの面積を求めよ。

(3) 点Dの座標を求めよ。



(解答)

(1)

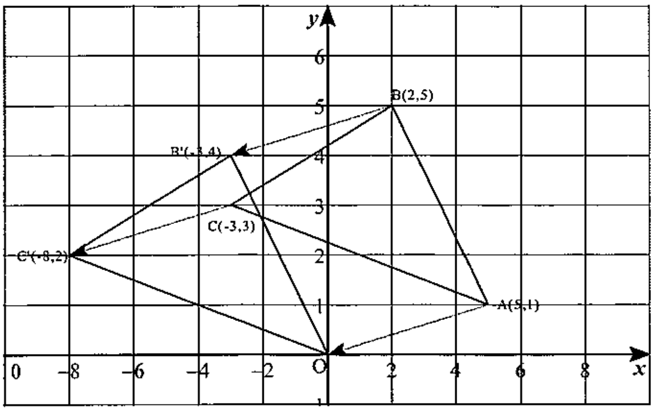
点Aを原点に平行移動するのと同様に点B、Cを平行移動した点をB'(b_x,b_y)、C'(c_x,c_y)とする。

$b_x=2-5=-3$　$b_y=5-1=4$

$c_x=-3-5=-8$　$c_y=3-1=2$

よって、点B'(-3,4)、点C'(-8,2)であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{OB'C'} = \frac{1}{2}|(-3)\times 2 - 4\times(-8)| = \frac{1}{2}|-6+32| = \frac{1}{2}\times 26 = 13 \quad \boxed{答え 13}$$



(2)

(考え方)

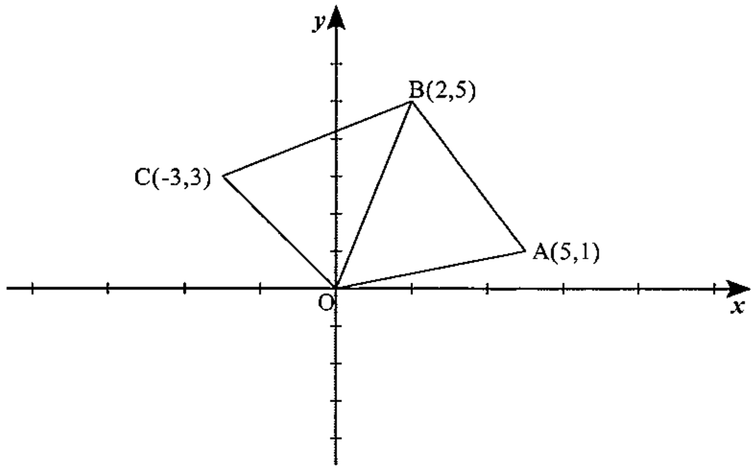
さてと、次は四角形 OABC の面積ですが、問題の流れから考えると(1)の結果を用いて、さらに△OAC の面積を求めて、△ABC の面積＋△OAC の面積で答えを出します。しかし、△ABC の面積の計算はちょっと面倒ですよね。なので、もう少し楽に四角形 OABC の面積を求めましょう。(1)の設問がなく、いきなり(2)からなら以下のように解くのがベターです。

(解答)

$$\text{四角形 OABC の面積} = \triangle\text{OAB の面積} + \triangle\text{OBC の面積} = \frac{1}{2}|5\times5-1\times2| + \frac{1}{2}|2\times3-5\times(-3)|$$

$$= \frac{1}{2}\times23 + \frac{1}{2}\times21 = \frac{23+21}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

答え　22

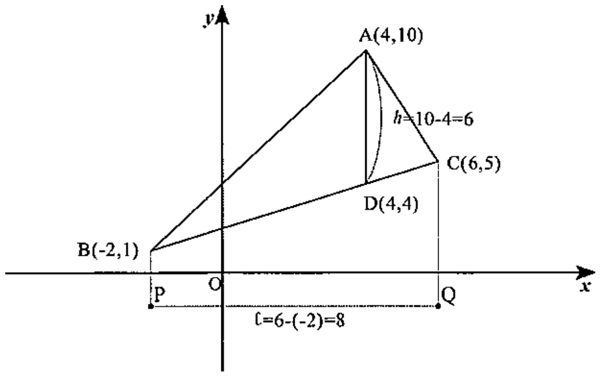


(3)

(考え方)

これは難しいので、入試で 9 割を目指す人がチャレンジって感じですかね。もちろん8割を目指す人も頑張って下さい。ただ、入試は時間とのタタカイなので、挑戦したくとも、他の問題の確かめをしたり、計算ミスが無いかの確認をしたりするのも大切です。

で、この問題を解くにあたって、公式①を使わずに三角形の面積を出せるようにしておくと色々と便利です。もちろん、公式①で解くのが早いのですが、計算の中にａやｔやｘなどの文字が入っている場合、公式①の中には絶対値(｜ ｜)というやっかいなモノがついているので、王道(?)の解き方もマスターしておきましょう。



$$\triangle ABC\text{の面積} = \frac{1}{2}\ell h$$

ℓ：２点 BC 間のｘ成分の差=6-(-2)

ｈ:点Ａを通りｙ軸に平行な直線と直線 BC との交点をＤとしたときの、AD の距離=10-4=6

では、上図の△ABC の面積を求めてみましょう。最初に直線 BC の方程式を求めましょう。２点 B、C の座標はそれぞれ B(-2,1)、C(6,5)なので y=ax+b の x と y に代入して a と b の連立方程式を解きます。

B(-2,1)を代入して、1=-2a+b・・・①

C(6,5)を代入して、 5=6a+b ・・・②

① ②を連立して解くと、

$$a=\frac{1}{2}、b=2 \text{ よって直線 BC の方程式は } y=\frac{1}{2}x+2$$

点 A を通り、y 軸に平行な直線と直線 BC との交点を D とすると、点 A と点 D の x 座標は等しいでの直線 BC に x=4 を代入すると y=2。よって、点 D の座標は(4,2)である。線分 AD の距離を h とすると、h=10-4=6。

２点 BC 間の x 成分の差を ℓ とすると、ℓ=6-(-2)=8

$$\triangle \mathrm{ABC} \text{ の面積} = \frac{1}{2}\ell \mathrm{h} = \frac{1}{2}\times 8\times 6 = 24$$

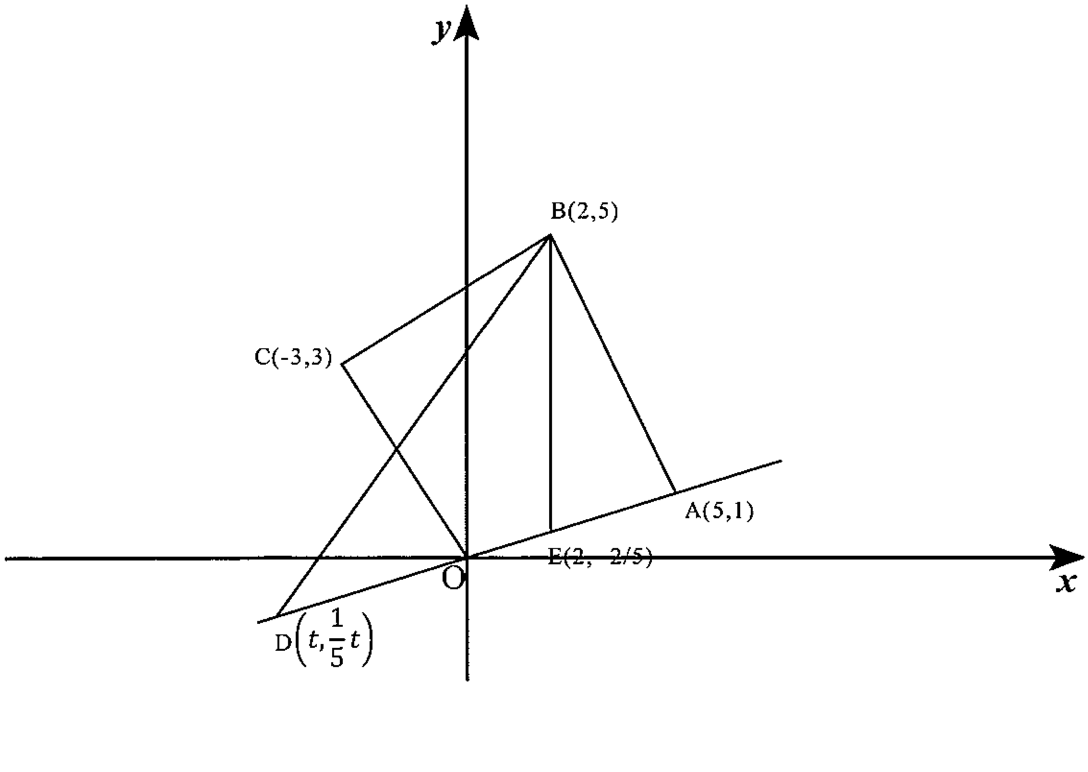
理解できたでしょうか？「分からない。」「わっけぇ、わっかんね～。」と聞こえてきそうですが、一つアドバイスします。これは算数や数学を教えている人なら誰もが口にする事です。それは、

『図を書く』『表を書く』『グラフを書く』

これを徹底的にやって下さい。ノートに図や表やグラフを書く。常に書く。易しい問題で書く。書く習慣をつける事で数学の力は飛躍的に上がります。(逆に言うと、出来ない人ほど書きません…。これはマジです。)

余談はこれぐらいにして、難攻不落の(3)に行きましょうか。皆さんは、まずはノートにグラフを書いて下さい。

(解答)



点Dのx座標をtとすると、点Dは直線OAの方程式

$$y=\frac{1}{5}x \text{上の点なので、}$$

$D\left(t,\frac{1}{5}t\right)$とおける。

また、点Bを通り、y軸に平行な直線と直線OAとの交点をEとすると、

点Eのy座標は、$y=\frac{1}{5}x$に$x=2$を代入して$y=\frac{2}{5}$ よって$E\left(2,\frac{2}{5}\right)$

AD間のx成分の差をℓ、BE間の距離をhとすると

$$\ell=5-t、h=5-\frac{2}{5}=\frac{23}{5}$$

$$\triangle ABD\text{の面積}=\frac{1}{2}\ell h=\frac{1}{2}\times(5-t)\times\frac{23}{5}=\frac{23(5-t)}{10}$$

(2)より四角形OABCの面積=22であるから、

$$\frac{23(5-t)}{10}=22$$

$$23(5-t)=220$$

$$5-t=\frac{220}{23}$$

$$-t=\frac{220}{23}-5=\frac{105}{23}$$

$$t=-\frac{105}{23}$$

$$y\text{座標は}\frac{1}{5}t=\frac{1}{5}\times\left(-\frac{105}{23}\right)=-\frac{21}{23}$$

$$\boxed{\text{答え}\quad D\left(-\frac{105}{23},\frac{21}{23}\right)}$$

(考察)

三角形面積は色々な方法で解くことが出来ます。頭で何通りあるかと考えてみようとしたのですが、やめました。「めんどくせぇ～。」と言うのが本心です。何通りもイヤ何十通りもあるかも知れません。で、本日のトドメの一撃です公式①のみで(1)の△ABCの面積を求めます。簡単です！

(1の超別解)△ABC=四角形OABC−△OAC=(△OAB+△OBC)−△OAC

$$=\left(\frac{23}{2}+\frac{21}{2}\right)-\frac{1}{2}|5\times3-1\times(-3)|=\frac{23+21-18}{2}=13$$